Physique Générale : Mécanique

05.01:

Coordonnées polaires, cylindriques et sphériques

Sections
SC, GC & SIE , BA1
Automne 2021

Dr. J.-P. Hogge

Swiss Plasma Center

École polytechnique fédérale de Lausanne

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

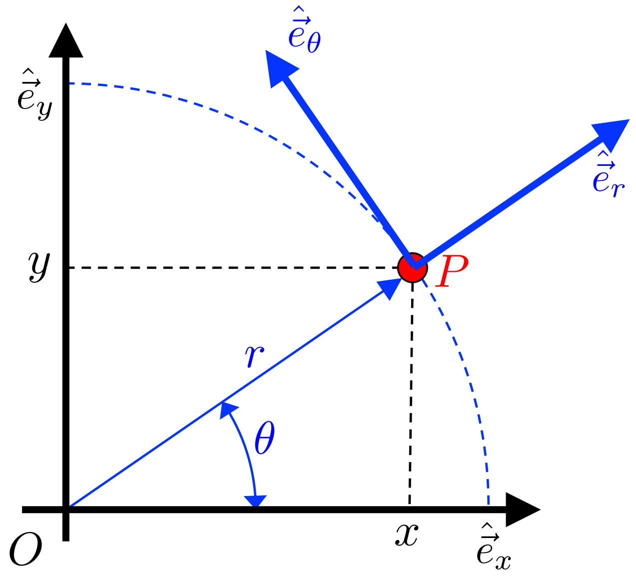
Aujourd'hui

- Coordonnées polaires (2D),
  - Définition
  - Position, vitesse et accélération en coordonnées polaires
- Coordonnées cylindriques
  - Définition
  - Vecteur position
  - Vecteur vitesse
  - Vecteur accélération
- Formule de Poisson
- Coordonnées sphériques
  - Définition
  - Vecteur position
  - Vecteur vitesse
  - Vecteur accélération

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Coordonnées polaires: position



Soit un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et un point P paramétrisé par (x, y)

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

Vecteur position en coordonnées cartésiennes

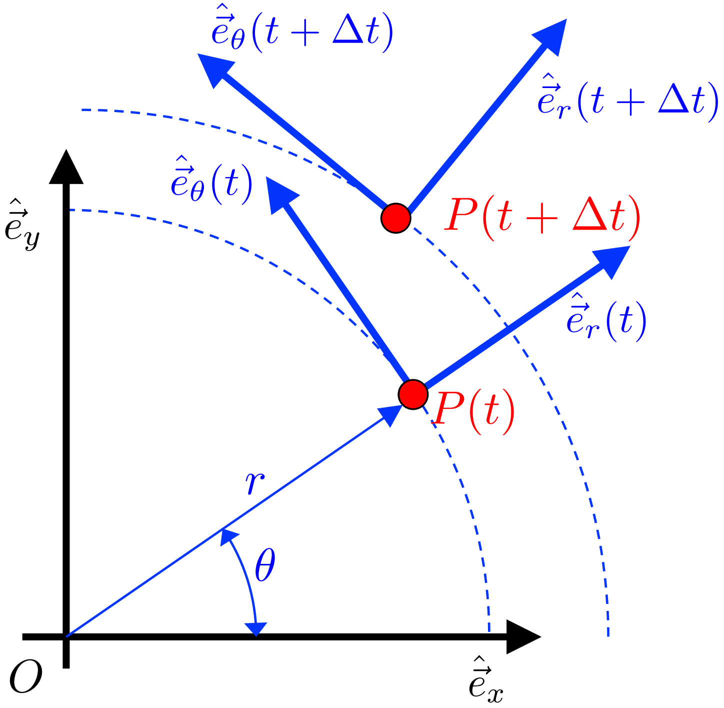
Une manière alternative de paramétriser la position de P est la distance r à l'origine et l'angle θ que le vecteur $\overrightarrow{OP}$ fait avec l'axe $\vec{e}_x$.

On attache un repère $(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ au point P, tel que $\vec{e}_r$ est parallèle à la ligne de coordonnées $\theta = \mathrm{cst}$ et $\vec{e}_\theta$ est tangent au cercle $r = \mathrm{cst}$.

Dans le repère $(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, le vecteur $\overrightarrow{OP}$ s'écrit:

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = r\vec{e}_r}$$

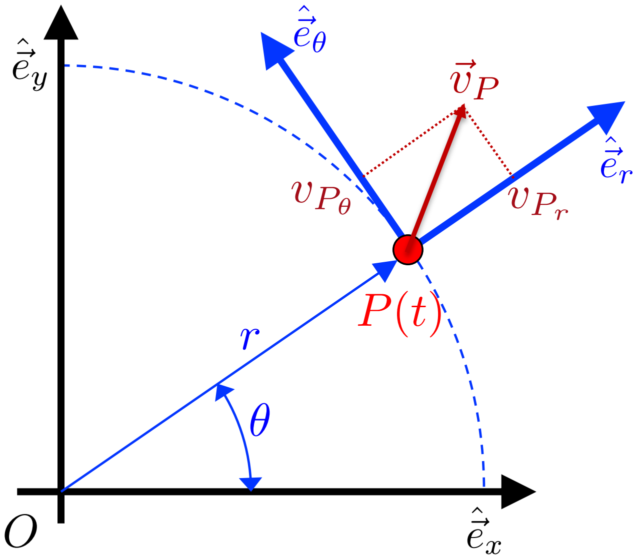
Vecteur position en coordonnées polaires



Comme le repère est défini par rapport au point P, les vecteurs $\hat{\vec{e}}_r$ et $\hat{\vec{e}}_\theta$ dépendent du temps.

Lorsque nous calculerons la vitesse et l'accélération du point P, il faudra explicitement en tenir compte.

Coordonnées polaires: vitesse



$$\overrightarrow{OP} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v}_P = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Calcul de $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ et de $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_x + \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_y = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_x - \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_y = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{v}_P = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = v_{P_r}\,\vec{e}_r + v_{P_\theta}\,\vec{e}_\theta}$$

Vecteur vitesse en coordonnées polaires

Coordonnées polaires: Accélération

A partir de $\vec{v}_P$ on dérive une seconde fois pour trouver l'accélération:

$$\vec{v}_P = \dot{r}\,\hat{\vec{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta$$

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d(\dot{r}\,\hat{\vec{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta)}{dt}$$

$$= \ddot{r}\,\hat{\vec{e}}_r + \dot{r}\,\frac{d\hat{\vec{e}}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta + r\ddot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta + r\dot{\theta}\,\frac{d\hat{\vec{e}}_\theta}{dt}$$

$$= \ddot{r}\,\hat{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta + r\ddot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta - r\dot{\theta}^2\,\hat{\vec{e}}_r$$

$$\boxed{\vec{a}_P = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{\vec{e}}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\hat{\vec{e}}_\theta}$$

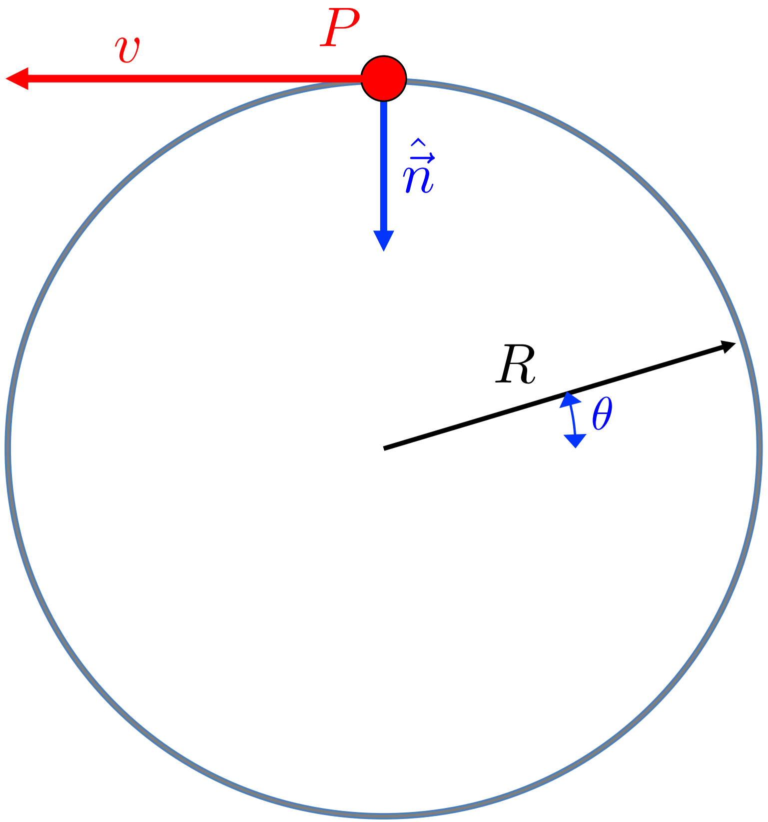
Vecteur acceleration en coordonnées polaires

$$\vec{a}_P = a_r\,\hat{\vec{e}}_r + a_\theta\,\hat{\vec{e}}_\theta$$

■ Faculté des sciences de base

■ Swiss Plasma Center

Retour au mouvement ciculaire uniforme



Nous avons vu au chapitre consacré à la cinématique qu'un mouvement circulaire uniforme est caractérisé par une accélération normale:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\,\hat{\vec{n}}$$

On retrouve ce résultat en passant en coordonnées polaires et en exprimant la vitesse et l'accélération

$$\vec{v}_P = \underbrace{\dot{r}}_{0}\,\hat{\vec{e}}_r + \underbrace{r\dot{\theta}}_{R\omega}\,\hat{\vec{e}}_\theta = \omega R\,\hat{\vec{e}}_\theta$$

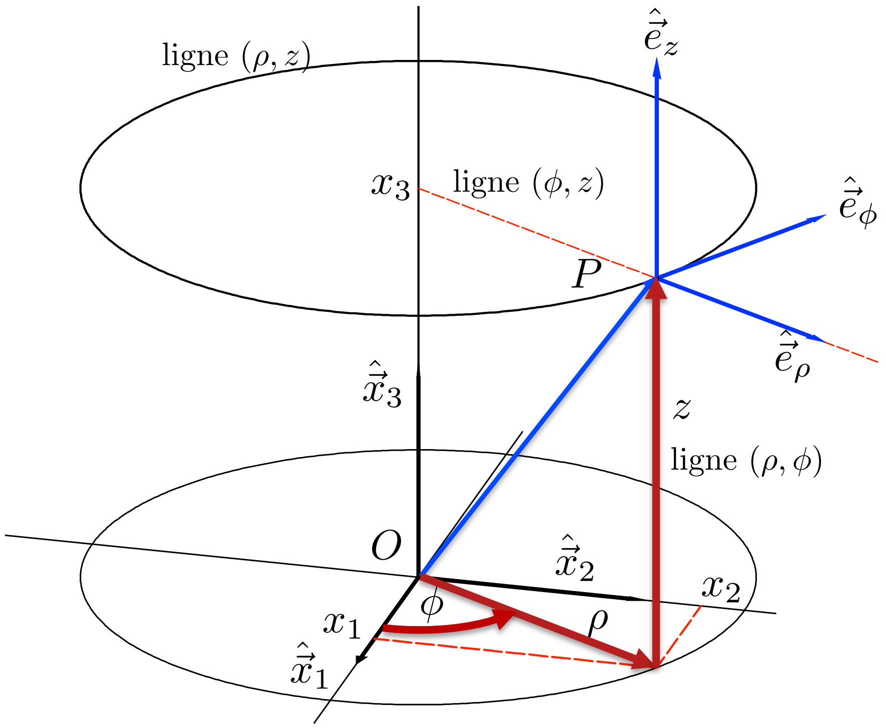
$$\vec{a}_P = (\underbrace{\ddot{r}}_{0} - \underbrace{r\dot{\theta}^2}_{R\omega^2})\,\hat{\vec{e}}_r + (\underbrace{2\dot{r}\dot{\theta}}_{0} + \underbrace{r\ddot{\theta}}_{0})\,\hat{\vec{e}}_\theta$$

$$= -R\omega^2\,\hat{\vec{e}}_r = -\frac{|v_P|^2}{R}\,\hat{\vec{e}}_r$$

■ Faculté des sciences de base

■ Swiss Plasma Center

Coordonnées cylindriques



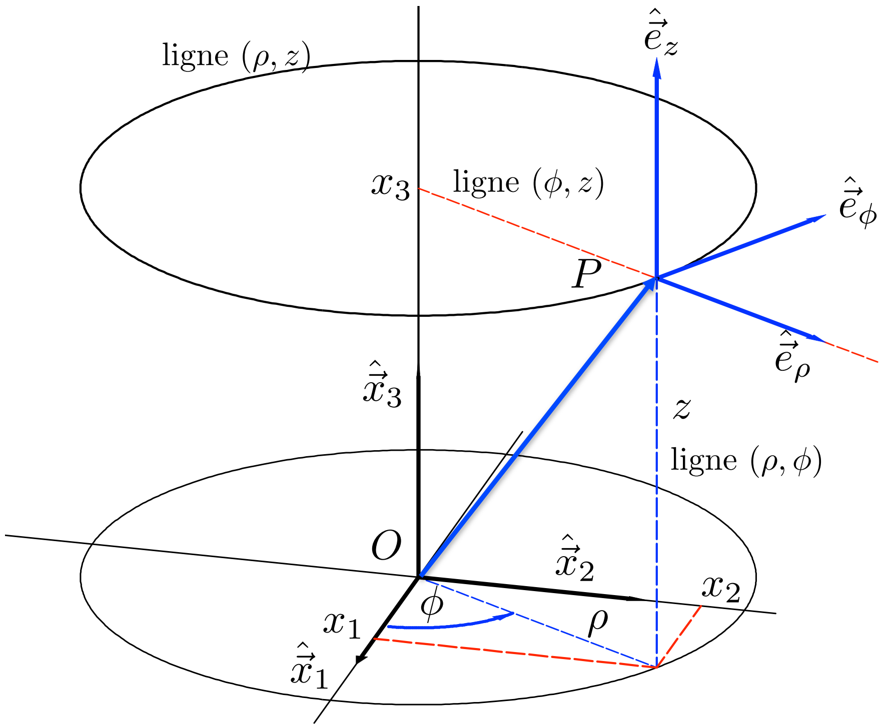
Soit un repère cartésien $(O, \hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2, \hat{\vec{x}}_3)$
Et un point P paramétré par (x_1,x_2,x_3).

En coordonnées **cylindriques** le point P est paramétré par (ρ,ϕ,z)

<u>Définition:</u>
Ligne de coordonnées (j,k):
Lieu géométrique des points tels que la coordonnée i varie et les coordonnées j et k sont constantes

On construit le repère $(P, \hat{\vec{e}}_r, \hat{\vec{e}}_\phi, \hat{\vec{e}}_z)$ orthonormé tel que les axes sont le long (ou tangents) aux lignes de coordonnées.

Coordonnées cylindriques: position



Le vecteur position s'écrit:

$$\boxed{\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \rho\,\hat{\vec{e}}_\rho + z\,\hat{\vec{e}}_z}$$

Vecteur position en coordonnées cylindriques

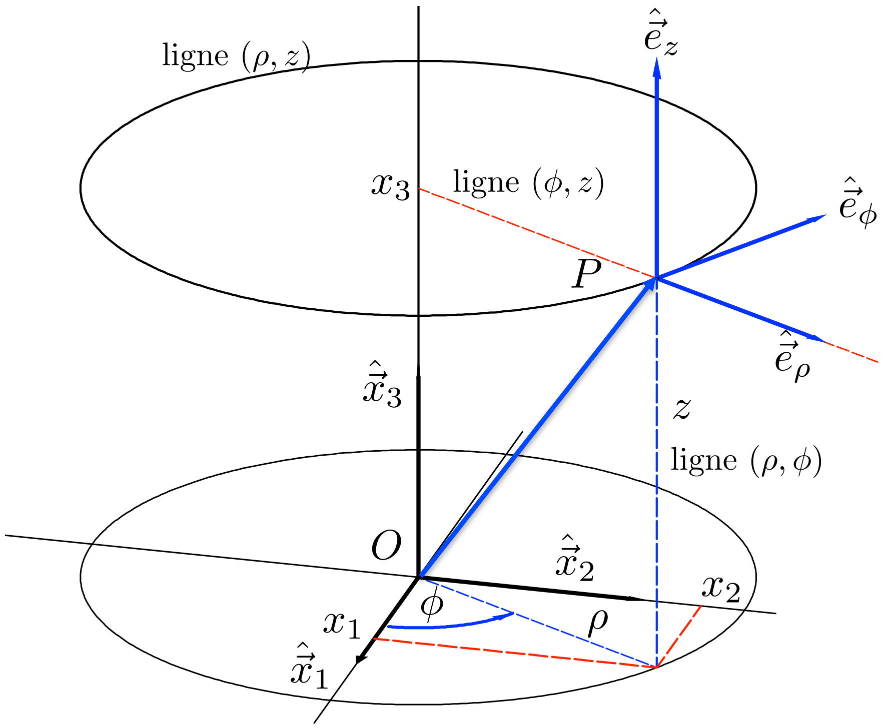
Pour trouver la vitesse, il faut dériver les vecteurs unités: on peut les écrire en fonction de $\hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2, \hat{\vec{x}}_3$ et dériver ensuite.

$$\hat{\vec{e}}_\rho = \cos\phi\,\hat{\vec{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\vec{x}}_2$$
$$\hat{\vec{e}}_\phi = -\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\vec{x}}_2$$
$$\hat{\vec{e}}_z = \hat{\vec{x}}_3$$

$$\frac{d\hat{\vec{e}}_\rho}{dt} = -\dot{\phi}\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_1 + \dot{\phi}\cos\phi\,\hat{\vec{x}}_2$$
$$\frac{d\hat{\vec{e}}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\cos\phi\,\hat{\vec{x}}_1 - \dot{\phi}\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_2$$

$$\frac{d\hat{\vec{e}}_\rho}{dt} = \dot{\phi}\hat{\vec{e}}_\phi \qquad \frac{d\hat{\vec{e}}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\vec{e}}_\rho$$

Coordonnées cylindriques: vitesse



La vitesse en coordonnées cylindriques s'écrit alors:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\,\hat{\vec{e}}_\rho + \rho\,\frac{d}{dt}\hat{\vec{e}}_\rho + \dot{z}\,\hat{\vec{e}}_z$$

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + \dot{z}\,\vec{e}_z}$$

Vecteur vitesse en coordonnées cylindriques

Coordonnées cylindriques: accélération

On dérive une seconde fois par raport au temps pour calculer l'accélération en coordonnées cylindriques:

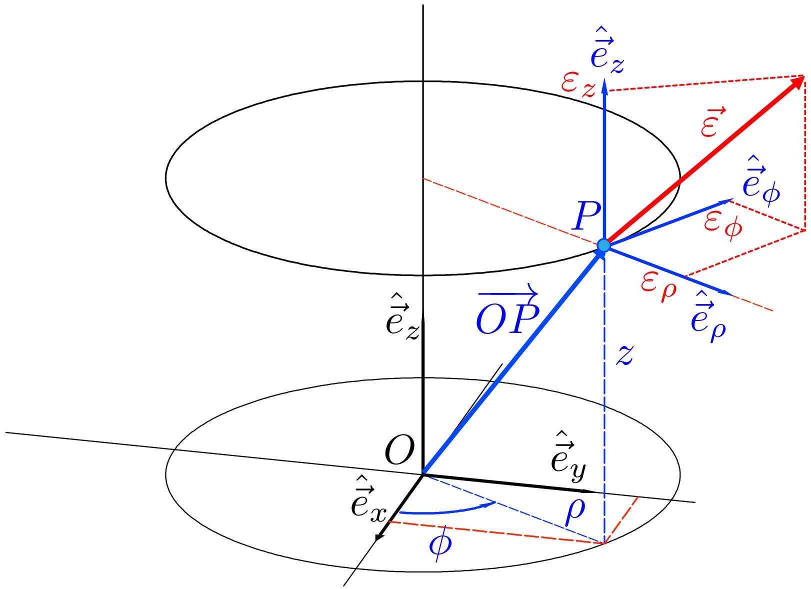
$$\begin{aligned}
\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \frac{d(\dot{\rho}\,\hat{\vec{e}}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\hat{\vec{e}}_\phi + \dot{z}\,\hat{\vec{e}}_z)}{dt} \\
&= \ddot{\rho}\,\hat{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\hat{\vec{e}}_\rho}{dt} + \rho\ddot{\phi}\,\hat{\vec{e}}_\phi + \dot{\rho}\dot{\phi}\,\hat{\vec{e}}_\phi + \rho\dot{\phi}\,\frac{d\hat{\vec{e}}_\phi}{dt} + \ddot{z}\,\hat{\vec{e}}_z \\
&= \ddot{\rho}\,\hat{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\phi}\,\hat{\vec{e}}_\phi + \rho\ddot{\phi}\,\hat{\vec{e}}_\phi + \dot{\rho}\dot{\phi}\,\hat{\vec{e}}_\phi - \rho\dot{\phi}^2\,\hat{\vec{e}}_\rho + \ddot{z}\,\hat{\vec{e}}_z
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\vec{e}}_\rho + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\hat{\vec{e}}_\phi + \ddot{z}\,\hat{\vec{e}}_z}$$

Vecteur accélération en coordonnées cylindriques

Dérivée d'un vecteur fixe dans (P, e_r, e_θ, e_z): Formule de Poisson

On considère un point P auquel un système de coordonnées cylindriques est attaché, et un vecteur $\vec{\varepsilon}$ qui est fixe dans $(P, \hat{\vec{e}}_r, \hat{\vec{e}}_\theta, \hat{\vec{e}}_z)$



$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_\rho \, \hat{\vec{e}}_\rho + \varepsilon_\phi \, \hat{\vec{e}}_\phi + \varepsilon_z \, \hat{\vec{e}}_z$$

$$\varepsilon_\rho, \varepsilon_\phi, \varepsilon_z \quad \text{constants}$$

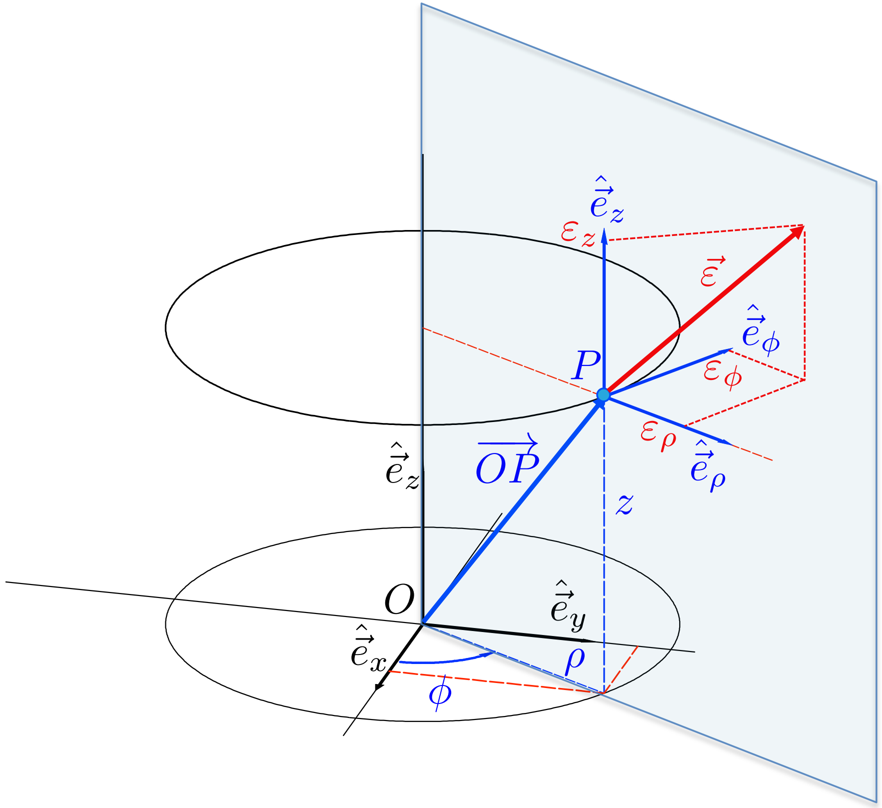
Exemple: Vecteur reliant deux points d'un solide

$$\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = \varepsilon_\rho \frac{d\hat{\vec{e}}_\rho}{dt} + \varepsilon_\phi \frac{d\hat{\vec{e}}_\phi}{dt} + \varepsilon_z \frac{d\hat{\vec{e}}_z}{dt}$$

$$+ \cancel{\frac{d\varepsilon_\rho}{dt}} \hat{\vec{e}}_\rho + \cancel{\frac{d\varepsilon_\phi}{dt}} \hat{\vec{e}}_\phi + \cancel{\frac{d\varepsilon_z}{dt}} \hat{\vec{e}}_z$$

Dérivée d'un vecteur fixe dans (P, e_r, e_θ, e_z): Formule de Poisson

Nous avons vu qu'en coordonnées cylindriques $\frac{d\hat{\vec{e}}_\rho}{dt} = \dot{\phi}\hat{\vec{e}}_\phi$ $\frac{d\hat{\vec{e}}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\vec{e}}_\rho$



$$\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = \varepsilon_\rho \underbrace{\frac{d\hat{\vec{e}}_\rho}{dt}}_{\dot{\phi}\,\hat{\vec{e}}_\theta} + \varepsilon_\phi \underbrace{\frac{d\hat{\vec{e}}_\phi}{dt}}_{-\dot{\phi}\,\hat{\vec{e}}_\rho} + \varepsilon_z \underbrace{\frac{d\hat{\vec{e}}_z}{dt}}_{0}$$

La dérivée temporelle du vecteur $\vec{\varepsilon}$ ne dépend que de $\dot{\phi}$ et est perpendiculaire à $\hat{\vec{e}}_z$

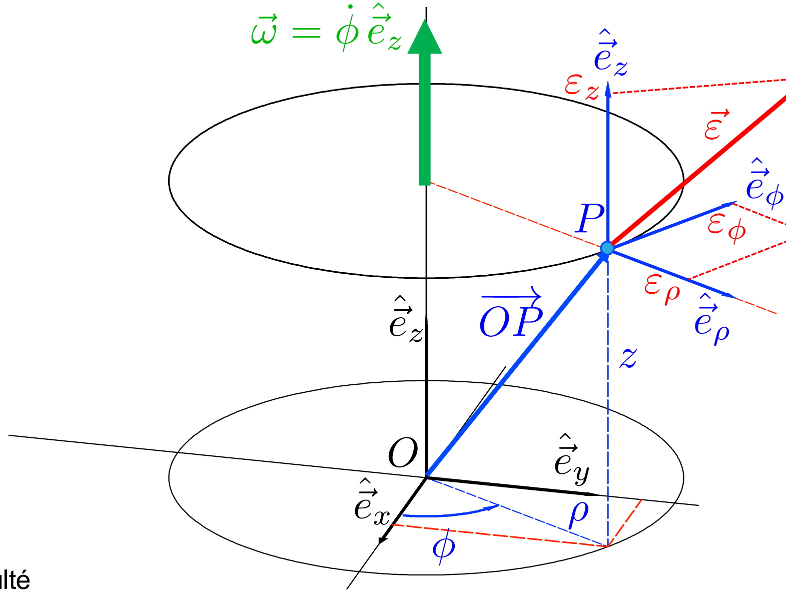
$$\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = -\varepsilon_\phi\,\dot{\phi}\,\hat{\vec{e}}_\rho + \varepsilon_\rho\,\dot{\phi}\,\hat{\vec{e}}_\phi$$

Notez que le point P peut avoir n'importe quel mouvement dans le plan $\phi = \mathrm{cste}$, cela n'affecte pas $\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt}$

Dérivée d'un vecteur fixe dans (P, e_r, e_θ, e_z): Formule de Poisson

Définissons le **vecteur de rotation** $\vec{\omega} = \dot{\phi}\,\hat{\vec{e}}_z$

et calculons: $\vec{\omega} \wedge \vec{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \hat{\vec{e}}_\rho & 0 & \varepsilon_\rho \\ \hat{\vec{e}}_\phi & 0 & \varepsilon_\phi \\ \hat{\vec{e}}_z & \dot{\phi} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$



$$\vec{\omega} \wedge \vec{\varepsilon} = -\varepsilon_\phi\,\dot{\phi}\,\hat{\vec{e}}_\rho + \varepsilon_\rho\,\dot{\phi}\,\hat{\vec{e}}_\phi = \frac{d\vec{\varepsilon}}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\varepsilon}}$$

Formule de Poisson

Dérivée d'un vecteur fixe dans (P, e_r, e_θ, e_z): Formule de Poisson

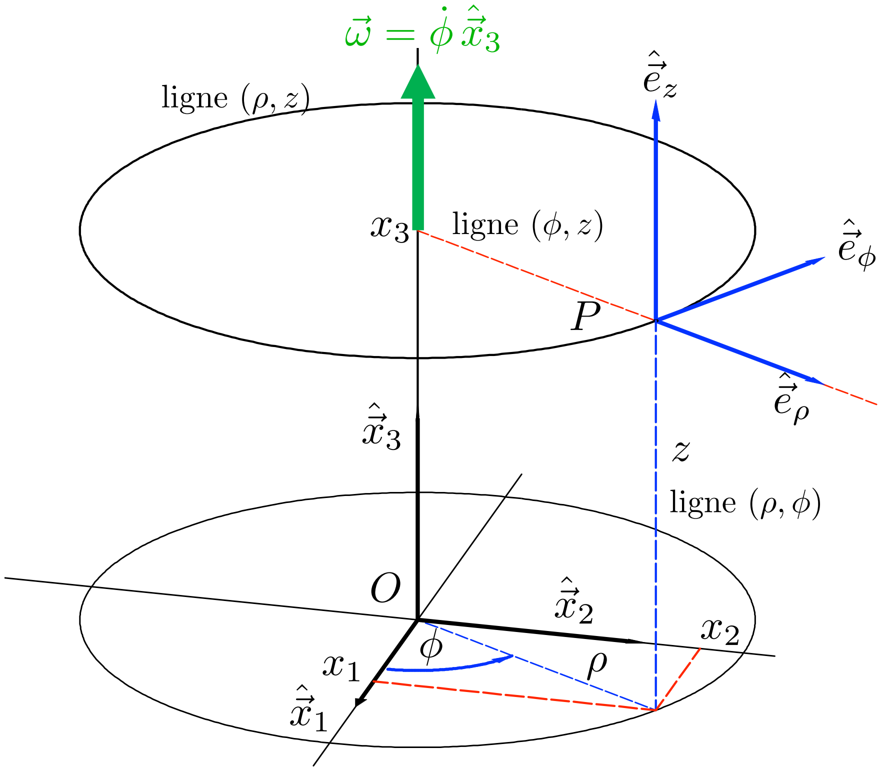
La formule de Poisson est généralisable à n'importe quel axe de rotation, qui peut de plus dépendre du temps !

Cela nous sera très utile lorsque nous aborderons la mécanique du solide indéformable.

Définition: **Axe de rotation:** $\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$

Définition: **Vitesse angulaire:** $|\vec{\omega}|$

Retour aux coordonnées cylindriques



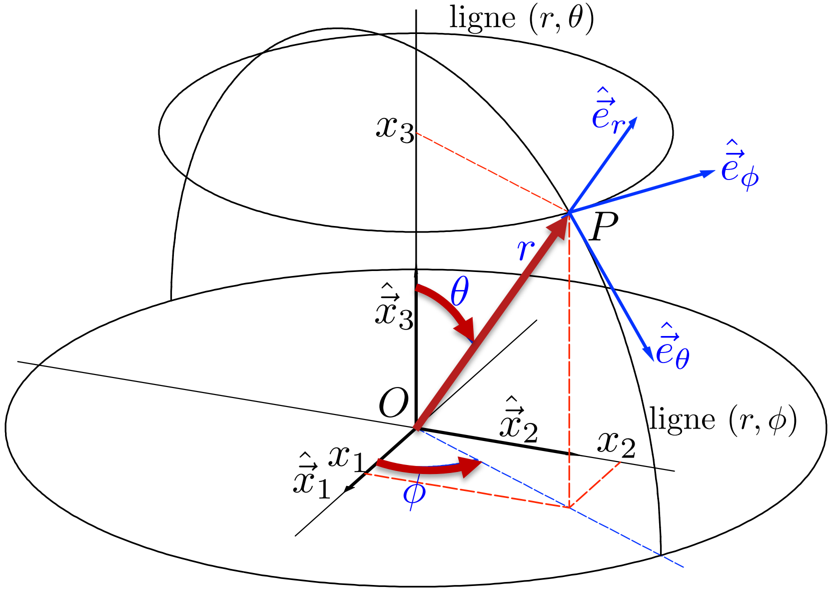
Une manière plus élégante de trouver les dérivées des vecteurs unités est d'utiliser les formules de Poisson. Les vecteurs $\hat{\vec{e}}_\phi$ et $\hat{\vec{e}}_\rho$ tournent autour de l'axe $\hat{\vec{x}}_3 \equiv \hat{\vec{e}}_z$ avec une vitesse angulaire $\dot{\phi}$

$$\frac{d\hat{\vec{e}}_\rho}{dt} = \dot{\phi}\hat{\vec{e}}_z \wedge \hat{\vec{e}}_\rho = \dot{\phi}\,\hat{\vec{e}}_\phi$$

$$\frac{d\hat{\vec{e}}_\phi}{dt} = \dot{\phi}\hat{\vec{e}}_z \wedge \hat{\vec{e}}_\phi = -\dot{\phi}\,\hat{\vec{e}}_\rho$$

Coordonnées sphériques

En coordonnées **sphériques** le point P est paramétré par (r,θ,ϕ)



$$\left(\hat{\vec{e}}_r, \hat{\vec{e}}_\theta, \hat{\vec{e}}_\phi\right) \qquad \left(\hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2, \hat{\vec{x}}_3\right)$$

$$\hat{\vec{e}}_r = \left(\hat{\vec{e}}_r \cdot \hat{\vec{x}}_1\right) \hat{\vec{x}}_1 + \left(\hat{\vec{e}}_r \cdot \hat{\vec{x}}_2\right) \hat{\vec{x}}_2 + \left(\hat{\vec{e}}_r \cdot \hat{\vec{x}}_3\right) \hat{\vec{x}}_3$$
$$\hat{\vec{e}}_\theta = \left(\hat{\vec{e}}_\theta \cdot \hat{\vec{x}}_1\right) \hat{\vec{x}}_1 + \left(\hat{\vec{e}}_\theta \cdot \hat{\vec{x}}_2\right) \hat{\vec{x}}_2 + \left(\hat{\vec{e}}_\theta \cdot \hat{\vec{x}}_3\right) \hat{\vec{x}}_3$$
$$\hat{\vec{e}}_\phi = \left(\hat{\vec{e}}_\phi \cdot \hat{\vec{x}}_1\right) \hat{\vec{x}}_1 + \left(\hat{\vec{e}}_\phi \cdot \hat{\vec{x}}_2\right) \hat{\vec{x}}_2 + \left(\hat{\vec{e}}_\phi \cdot \hat{\vec{x}}_3\right) \hat{\vec{x}}_3$$

$$\hat{\vec{e}}_r = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\vec{x}}_1 + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_2 + \cos\theta\,\hat{\vec{x}}_3$$
$$\hat{\vec{e}}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\vec{x}}_1 + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_2 - \sin\theta\,\hat{\vec{x}}_3$$
$$\hat{\vec{e}}_\phi = -\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\vec{x}}_2$$

Relations inverses:

$$\hat{\vec{x}}_1 = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\vec{e}}_r + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\vec{e}}_\theta - \sin\phi\,\hat{\vec{e}}_\phi$$
$$\hat{\vec{x}}_2 = \sin\theta\sin\phi\,\hat{\vec{e}}_r + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\vec{e}}_\theta + \cos\phi\,\hat{\vec{e}}_\phi$$
$$\hat{\vec{x}}_3 = \cos\theta\,\hat{\vec{e}}_r - \sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\theta$$

Coordonnées sphériques: dérivées des vecteurs unites (methode 1)

$$\hat{\vec{e}}_r = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\vec{x}}_1 + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_2 + \cos\theta\,\hat{\vec{x}}_3$$
$$\hat{\vec{e}}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\vec{x}}_1 + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_2 - \sin\theta\,\hat{\vec{x}}_3$$
$$\hat{\vec{e}}_\phi = -\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\vec{x}}_2$$

$$\hat{\vec{x}}_1 = \cos\phi\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_r + \cos\phi\cos\theta\,\hat{\vec{e}}_\theta - \sin\phi\,\hat{\vec{e}}_\phi$$
$$\hat{\vec{x}}_2 = \sin\phi\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_r + \sin\phi\cos\theta\,\hat{\vec{e}}_\theta + \cos\phi\,\hat{\vec{e}}_\phi$$
$$\hat{\vec{x}}_3 = \cos\theta\,\hat{\vec{e}}_r - \sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\theta$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{\vec{e}}_r &= \dot\theta\cos\theta\cos\phi\,\hat{\vec{x}}_1 - \dot\phi\sin\theta\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_1 + \dot\theta\cos\theta\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_2 + \dot\phi\sin\theta\cos\phi\,\hat{\vec{x}}_2 - \dot\theta\sin\theta\,\hat{\vec{x}}_3 \\
&= \dot\theta\big(\cos\theta\cos\phi\,\hat{\vec{x}}_1 + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_2 - \sin\theta\,\hat{\vec{x}}_3\big) + \dot\phi\sin\theta\big(-\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\vec{x}}_2\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\hat{\vec{e}}_r = \dot\theta\,\hat{\vec{e}}_\theta + \dot\phi\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{\vec{e}}_\theta &= -\dot\theta\sin\theta\cos\phi\,\hat{\vec{x}}_1 - \dot\phi\cos\theta\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_1 - \dot\theta\sin\theta\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_2 + \dot\phi\cos\theta\cos\phi\,\hat{\vec{x}}_2 - \dot\theta\cos\theta\,\hat{\vec{x}}_3 \\
&= -\dot\theta\big(\sin\theta\cos\phi\,\hat{\vec{x}}_1 + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_2 + \cos\theta\,\hat{\vec{x}}_3\big) + \dot\phi\cos\theta\big(-\sin\phi\,\hat{\vec{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\vec{x}}_2\big)
\end{aligned}$$

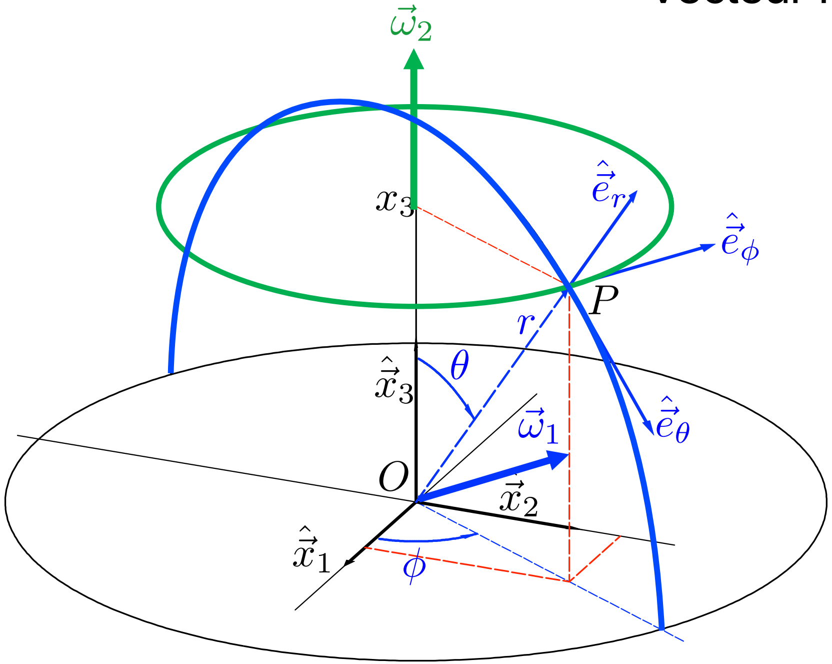
$$\boxed{\frac{d}{dt}\hat{\vec{e}}_\theta = -\dot\theta\,\hat{\vec{e}}_r + \dot\phi\cos\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{\vec{e}}_\phi &= -\dot\phi\big(\cos\phi\,\hat{\vec{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\vec{x}}_2\big) \\
&= -\dot\phi\big(\cos^2\phi\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_r + \cos^2\phi\cos\theta\,\hat{\vec{e}}_\theta - \cos\phi\sin\phi\,\hat{\vec{e}}_\phi\big) \\
&\quad -\dot\phi\big(\sin^2\phi\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_r + \sin^2\phi\cos\theta\,\hat{\vec{e}}_\theta + \cos\phi\sin\phi\,\hat{\vec{e}}_\phi\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\hat{\vec{e}}_\phi = -\dot\phi\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_r - \dot\phi\cos\theta\,\hat{\vec{e}}_\theta}$$

Coordonnées sphériques: dérivées des vecteurs unites (methode 2)

Vecteur rotation en coordonnées **sphériques.**



Le vecteur OP subit deux rotations:

- Une rotation autour de $\hat{\vec{e}}_\phi$ à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$

$$\vec{\omega}_1 = \dot{\theta}\hat{\vec{e}}_\phi$$

- Une rotation autour de $\hat{\vec{x}}_3 = \cos\theta\,\hat{\vec{e}}_r - \sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\theta$ à la vitesse angulaire $\dot{\phi}$

$$\vec{\omega}_2 = \dot{\phi}\left(\cos\theta\,\hat{\vec{e}}_r - \sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\theta\right)$$

- Sans démonstration: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\vec{e}}_r - \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\theta + \dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\phi}$$

Coordonnées sphériques: dérivées des vecteurs unites (methode 2)

- Pour calculer les dérivées des vecteurs de base on utilise la formule de Poisson:

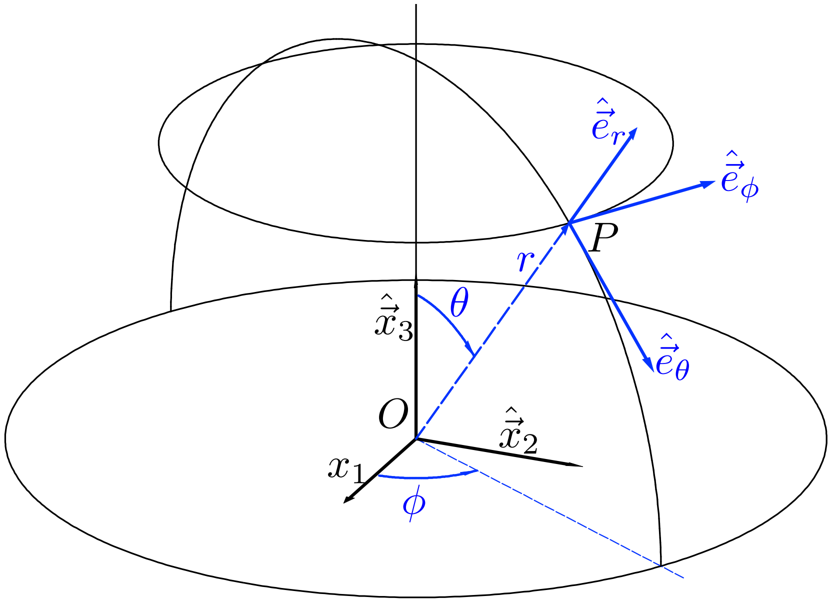
$$\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\varepsilon} \qquad \vec{\varepsilon} = \hat{\vec{e}}_r,\ \hat{\vec{e}}_\theta,\ \hat{\vec{e}}_\phi \qquad \vec{\omega} = \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\vec{e}}_r - \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\theta + \dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\phi$$

$$\boxed{\frac{d\hat{\vec{e}}_r}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi}$$

$$\boxed{\frac{d\hat{\vec{e}}_\theta}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_r + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi}$$

$$\boxed{\frac{d\hat{\vec{e}}_\phi}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\vec{e}}_\phi = -\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_r - \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\vec{e}}_\theta}$$

Coordonnées sphériques: Position et vitesse



Vecteur position en coordonnées sphériques:

$$\boxed{\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r\,\hat{\vec{e}}_r}$$

Vecteur position en coordonnées sphériques

Vecteur vitesse en coordonnées sphériques:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{\vec{e}}_r + r\,\frac{d\hat{\vec{e}}_r}{dt}$$

$$= \dot{r}\,\hat{\vec{e}}_r + r\left(\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi\right)$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\hat{\vec{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi}$$

Vecteur vitesse en coordonnées sphériques

v_r $\quad v_\theta$ $\quad v_\phi$

- Faculté des sciences de base
- Swiss Plasma Center

Coordonnées sphériques: Accélération

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{\vec{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}}{dt} &= \ddot{r}\,\hat{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta + r\ddot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta + \dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi + r\ddot{\phi}\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi \\
&\quad + \dot{r}\frac{d}{dt}\hat{\vec{e}}_r + r\dot{\theta}\frac{d}{dt}\hat{\vec{e}}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\frac{d}{dt}\hat{\vec{e}}_\phi \\
&= \ddot{r}\,\hat{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta + r\ddot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta + \dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi + r\ddot{\phi}\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi \\
&\quad + \dot{r}\left(\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi\right) + r\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_r + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi\right) + r\dot{\phi}\sin\theta\left(-\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_r - \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\vec{e}}_\theta\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{\vec{e}}_r \\
&\quad + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta\right)\hat{\vec{e}}_\theta \\
&\quad + \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\right)\hat{\vec{e}}_\phi
\end{aligned}}$$

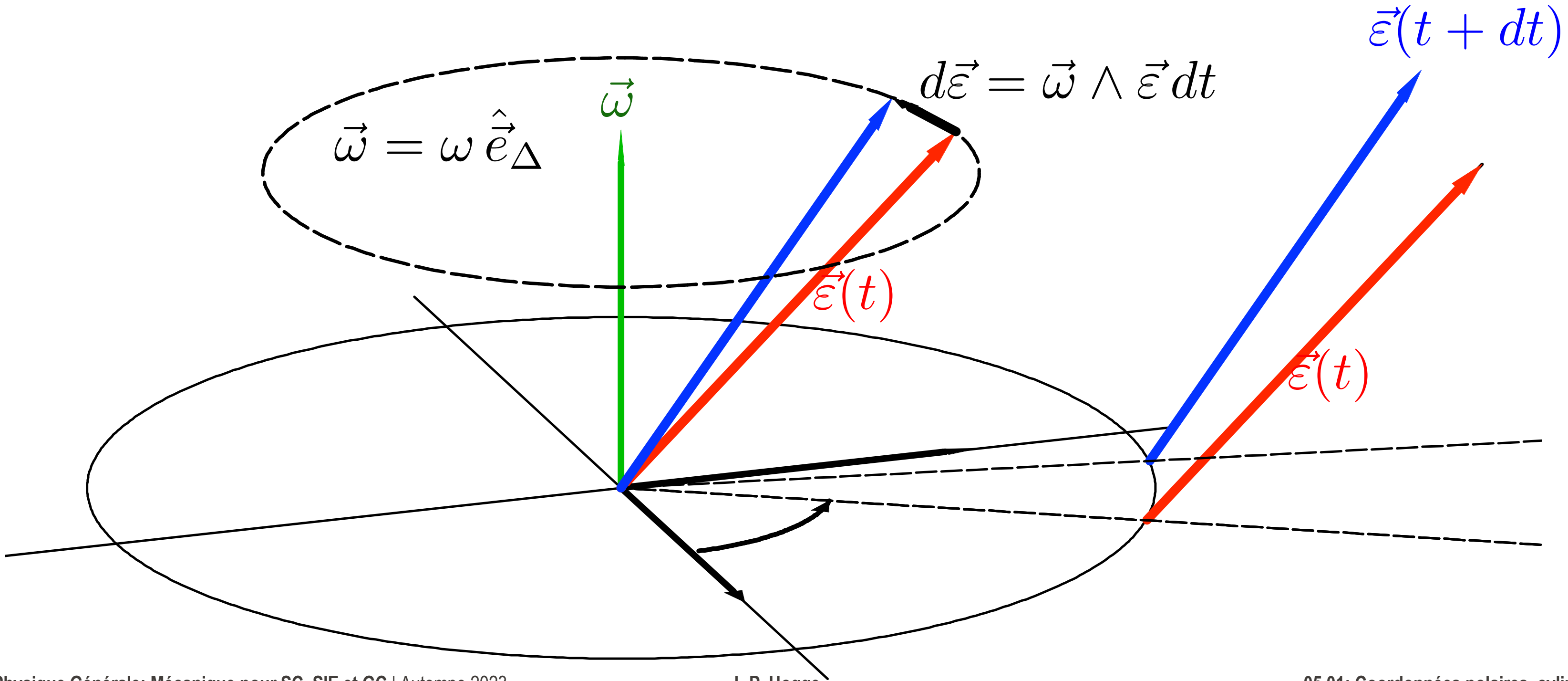
Vecteur accélération en coordonnées sphériques

$$\vec{a} = a_r\,\hat{\vec{e}}_r + a_\theta\,\hat{\vec{e}}_\theta + a_\phi\,\hat{\vec{e}}_\phi$$

Résumé: Formule de Poisson

Formule de Poisson:
La dérivée temporelle d'un vecteur $\vec{\varepsilon}$ de norme constante, en rotation de vitesse angulaire $|\vec{\omega}|$ autour d'une axe Δ est donnée par:

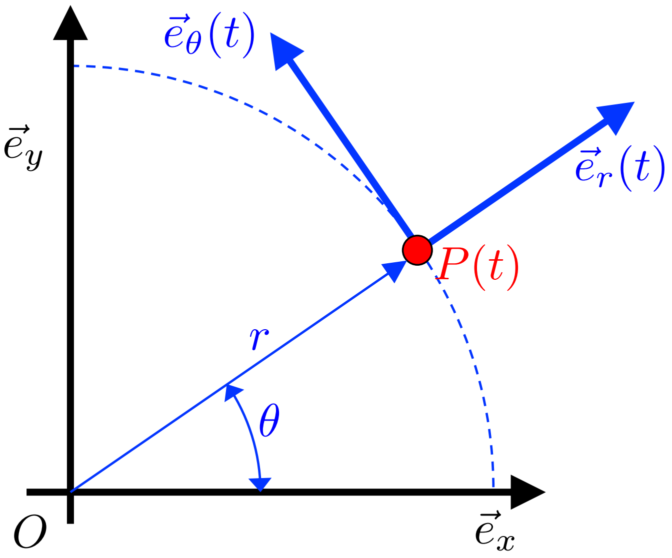
$$\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\varepsilon}$$



Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Résumé: Coordonnées polaires (2D)



P est paramétrisé par (r,θ)

Position:

$$\overrightarrow{OP} = r\,\vec{e}_r$$

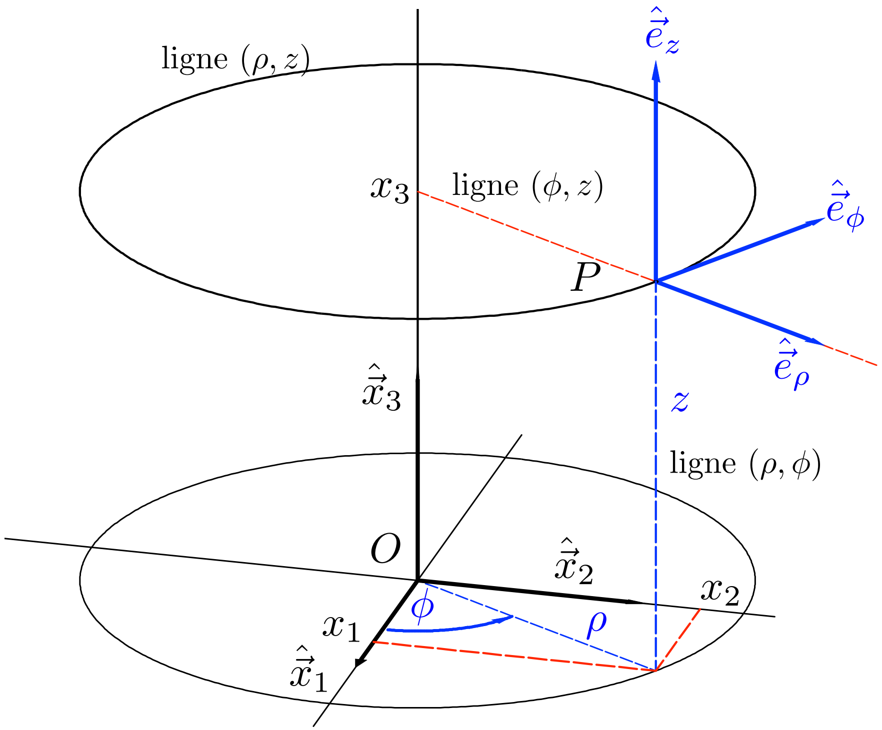
Vitesse:

$$\vec{v}_\mathrm{P} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

Accélération:

$$\begin{aligned}\vec{a}_\mathrm{P} \quad = & \quad (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r \\ + & \quad (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

Résumé: Coordonnées cylindriques



P est paramétrisé par (ρ,ϕ,z)

Position:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \rho\,\hat{\vec{e}}_\rho + z\,\hat{\vec{e}}_z$$

Vitesse:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + \dot{z}\,\vec{e}_z$$

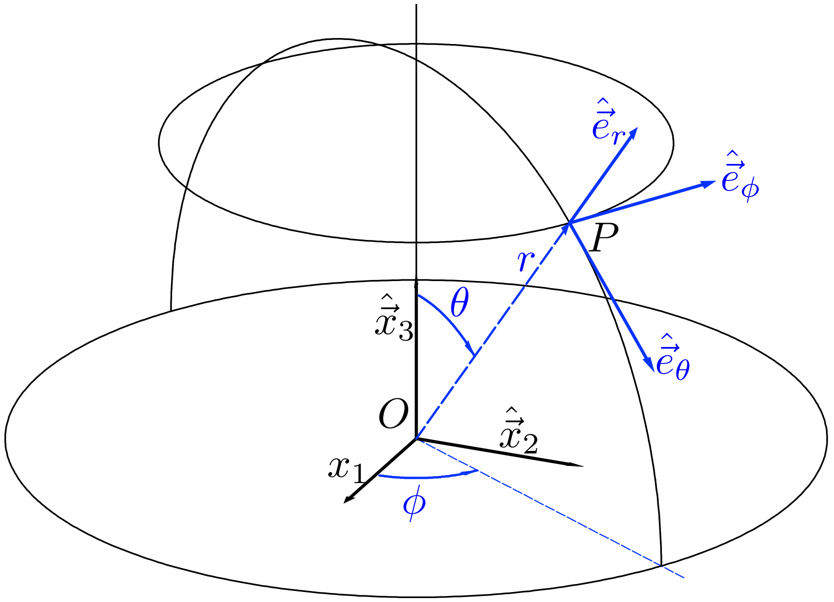
Accélération:

$$\begin{aligned} \vec{a} \quad = & \quad \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\vec{e}}_\rho \\ + & \quad \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\hat{\vec{e}}_\phi \\ + & \quad \ddot{z}\,\hat{\vec{e}}_z \end{aligned}$$

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Résumé: Coordonnées sphériques



P est paramétrisé par (r,θ,ϕ)

Position:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r\,\hat{\vec{e}}_r$$

Vitesse:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{\vec{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi$$

Accélération:

$$\begin{aligned}\vec{a} \quad = \quad & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{\vec{e}}_r \\ + \quad & \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta\right)\hat{\vec{e}}_\theta \\ + \quad & \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\right)\hat{\vec{e}}_\phi\end{aligned}$$